



(C) 取得极大值

(D) 取得极小值

3. 微分方程  $y'' - y = e^x + 1$  的一个特解可设为 ( $a, b$  为常数) 【 】

(A)  $a e^x + b$  (B)  $a x e^x + b$  (C)  $a e^x + b x$  (D)  $a x e^x + b x$

4. 函数  $y = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln |1+x|}{(e^x - 1)(x - 2)}$  的间断点个数是 【 】

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5. 当  $x \rightarrow 0$  时, 函数  $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$  是 【 】

(A) 无界的但不是无穷大量 (B) 无穷大量

(C) 有界的但不是无穷小量 (D) 无穷小量

得分
----

三、计算题 (共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

1. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (t \sin t + \tan^3 t \cdot \ln t) dt}{\cos x \int_0^x \ln^2(1+t) dt}$  的值.

2. 讨论函数  $f(x) = |x|^{\frac{1}{20}} + |x|^{\frac{1}{21}} - 2 \cos x$  的零点个数.

3. 求微分方程  $(y+1)y'' + (y')^2 = (1+2y+\ln y)y'$  满足  $y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$  的解.

4. 计算积分  $\int_{-1}^1 \frac{2x^2 + x^2 \sin x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx$ .

5. 将圆周  $x^2 + y^2 = 4x - 3$  绕  $y$  轴旋转一周, 求所得旋转体的体积.

6. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} a \sin^2 x + b \sin x + c & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ x^k \sin \frac{1}{x} & , x > 0 \end{cases}$  在  $(-\infty, \infty)$  上连续可微, 讨论

常数  $a, b, c$  以及  $k$  的取值.

7. 求函数  $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t) e^{-t^2} dt$  的单调区间与极值.

8. (10 分) 求微分方程组  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  的单调区间与极值.

得分

四、证明题 (共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分)

1. 已知等式两端的两个积分都收敛, 且  $a, b > 0$ , 求证:  $\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2 + 4ab}\right) dt$ .

2. 设  $0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). 求证: 数列  $\{x_n\}$  收敛, 并求其极限.

3. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上二阶可导, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$ .

(1) 求证:  $\exists \xi \in (0, 1)$ , 使得  $f(\xi) = 0$ ;

(2) 求证:  $\exists \eta \in (0, 1)$ , 使得  $f''(\eta) = f(\eta)$ .

自觉遵守  
考试规则,  
诚信考试,  
绝不作弊

装订线内  
不要答题